



УДК 519.246.85

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И ПОСТРОЕНИЕ КОНСЕНСУС-ПРОГНОЗА ЗАКАЗА ТОВАРНО-МАТЕРИАЛЬНЫХ ЦЕННОСТЕЙ С КОРОТКИМ СРОКОМ ХРАНЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ АО «ДИКСИ-ЮГ»

Д.В. Петровский, магистр кафедры системного анализа и логистики ГУАП.

Решение задачи о прогнозировании в ее классической интерпретации является важным средством управления предприятием. В данной статье будут рассмотрены и исследованы несколько моделей анализа и прогнозирования временных рядов, на основании полученных при исследовании результатов будет сделан консенсус-прогноз по продукту «Фарш Охлажденный» компании ОАО «Ариант-агро».

Ключевые слова: временные ряды, трендовые модели, аппроксимация, модель ARIMA, нейросетевые модели, ARIMASC, модель Хольта-Винтерса, модель Census I, консенсус прогноз.

Решение задачи о прогнозировании в ее классической интерпретации является важным средством управления предприятием. В данной статье будут рассмотрены и исследованы несколько моделей анализа и прогнозирования временных рядов, на основании полученных при исследовании результатов будет сделан консенсус-прогноз по продукту «Фарш Охлажденный» компании ОАО «Ариант-агро».

Данные для анализа представляю собой статистику заказов позиции «Фарш Охлажденный» от одного из поставщиков на склад компании АО «ДИКСИ-ЮГ», все переменные принадлежат к интервальному типу[3]. Срок хранения данного товара составляет 7 дней с момента изготовления. Данный параметр имеет важное значение при решении задач о товарном запасе в цепочке поставок.

Модели исследования временных рядов имеют классификацию, которая служит хорошим подспорьем исследователю при их выборе. На рисунке 1 представлена классификация основных методов такого анализа.

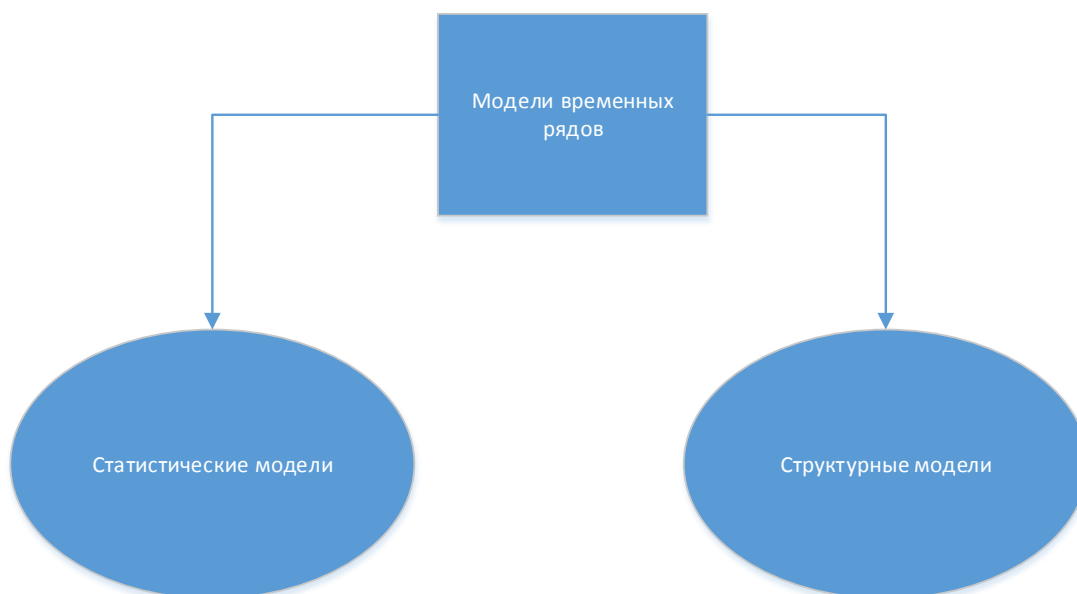


Рис.1. Классификация моделей.



К статистическим моделям обычно относят:

- Трендовые модели, модель максимального подобия (ММП), Тренд-сезонные модели.
- Сезонная декомпозиция CENSUS I, CENSUS II.
- Модели сглаживаний (скользящее среднее, центрированное СА, экспоненциальное сглаживание, модели Винтера, Хольта, Хольта-Винтерса и т.п.).
- Модели регрессии (линейная, множественная, парная, обратная регрессия и т.п.).
- Авторегрессионные модели (AR, ARIMA, ARIMASC, GARCH и т.п.).
- Временные ряды с интервенцией.

К структурным моделям относят:

- Нейронные сети.
- Цепи Маркова и стохастические сети Петри.
- Классификационные-регрессионные деревья с различными методами поиска в них (слепой поиск, tabu search и т.д).
- Генетические алгоритмы и генетическое программирование.
- Матрично-векторные методы.
- И т.д.

В данном материале будут рассмотрены:

- Трендовые модели.
- CENSUS I
- Экспоненциальное сглаживание, модель Хольта-Винтерса).
- AR, ARIMA.
- Нейронные сети.

На рисунке 2 представлены заказы Куриного Фарша за три месяца в период с 01.07.14 по 30.09.14. Итоговое количество наблюдений 92. При построении моделей из данных были убраны последние 10 наблюдений для проведения исследования адекватности модели и кросс-проверки.

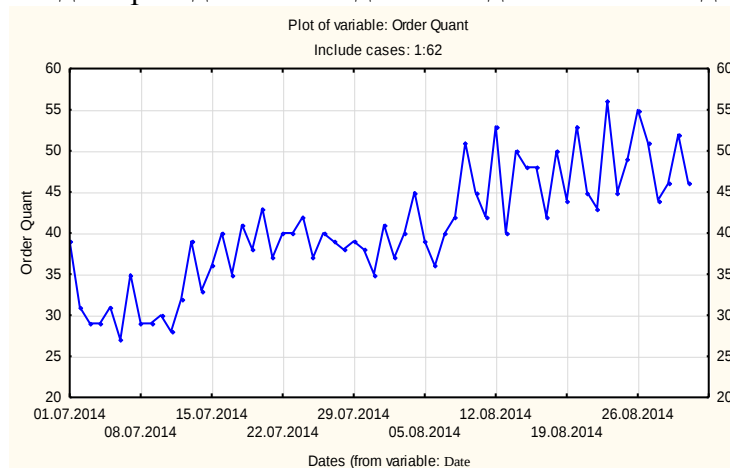


Рис.2. Заказываемое кол-во позиции «Куриный Фарш».

Из рисунка видно, что данный ряд является интервальным, с восходящим линейным трендом и высокой волатильностью, имеется сезонность.

Используемое ПО: Dell Statistica 10.5.1; MS Excel 2013.

Часть входных данных продемонстрирована в таблице 1.



Таблица 1. Входные данные

Date	Order Quant	Date	Order Quant	Date	Order Quant
01.07.2014	39	01.08.2014	41	01.09.2014	44
02.07.2014	31	02.08.2014	37	02.09.2014	46
03.07.2014	29	03.08.2014	40	03.09.2014	52
04.07.2014	29	04.08.2014	45	04.09.2014	47
05.07.2014	31	05.08.2014	39	05.09.2014	57
06.07.2014	27	06.08.2014	36	06.09.2014	51

Классический МНК. Параметры модели найдены матричным методом[2] и указаны в таблице 2.

Таблица 2. Коэффициенты МНК.

	x^2	x		
x	187165	3403	$x*y$	161752
n	3403	82	y	3560
Обратная матрица		a	0,305003	
		b	30,757	

Тогда итоговое уравнение примет вид:

$$\bar{y}_i = ax_i + b = 0,305x_i + 30,757, (1).$$

В Таблице 2 представлен усеченный ряд данных исходных значений и их аппроксимация. Значения всех данных в этой и последующих моделях округлялись с точностью до одного знака, т.к. поставщик принимает и привозит только целочисленные заказы.

Таблица 2.

y_i	$\bar{y}_i$
61	56
53	56
60	57
55	57
54	57

На рисунке 3 представлены: а) исходный ряд, его аппроксимация по линейному тренду и б) прогноз по нему на 10 значений вперед.

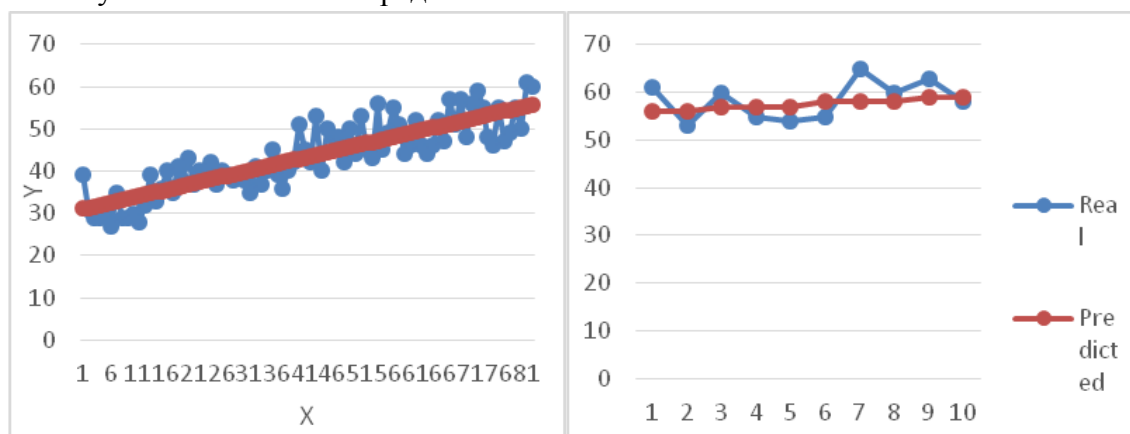


Рис.3. а) Аппроксимация ряда по линейному тренду. б) Прогноз.



Значения статистических показателей для трендовой модели представлены в таблице 3.

Однако, как уже говорилось выше, данный ряд имеет сильную волатильность, что ставит под сомнение надежность использования трендовых моделей и метода классического МНК для данного ряда. Для проверки была использована гипотеза об автокорреляции в остатках[6]. В случае её присутствия к ряду не может быть применены МНК-подобные методы. На рисунке 4 представлена коррелограмма автокорреляции в остатках.

Таблица 3. Статистические показатели линейной трендовой модели

St	4,158737
m_a	0,459256
m_b	0,07129
m_{Yk}	6,574767
t	4,278327
D – доверительный интервал	$\pm 5,548092$
mSt	0,324743

СКО рассчитывается по формуле (1):

$$St = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}, (1),$$

Где: $\sum d^2$ – сумма квадратов отклонений, n – размер выборки

Средняя ошибка отклонения (2):

$$m_a = \frac{St}{\sqrt{n}}, (2).$$

Средняя ошибка среднегодового прироста (3):

$$m_b = \frac{St}{\sqrt{\sum n^2}}, (3).$$

Средняя ошибка прогноза на период вперед (4):

$$m_{Yk} = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 * t^2}, (4).$$

Где: t^2 – длина прогноза.

Критерий Стьюдента для линейного тренда рассчитывается по формуле (5), для всех остальных случаев использовалась формула (6).

$$t = \frac{|b|}{m_a}, (5),$$

Где: $|b|$ – параметр b в уравнении тренда

$$t = \frac{\sum d}{\sqrt{\frac{n(\sum d^2) - d^2}{n-1}}}, (6), [5]$$

Средняя ошибка выборочной оценки среднего отклонения от тренда находится по формуле:

$$m_{st} = \frac{St}{\sqrt{2n}}, (7)$$

Доверительный интервал вычисляется следующим образом (8):

$$St \pm t_s * m_{st}, (8).$$

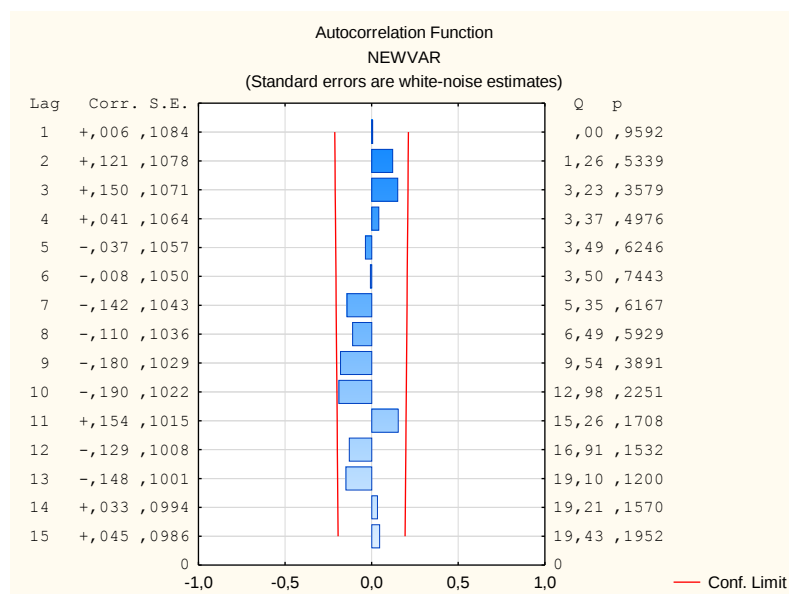


Рис.4. Автокорреляция в остатках.

Автокорреляция в остатках отсутствует, соответственно гипотеза о несостоятельности МНК отвергается.

Таким образом простая тренд-модель с достаточно высокой точностью аппроксимирует ряд. Однако из-за высокой волатильности прогноз по ней не будет отражать всей картины взаимосвязанных признаков в ряде. Для увеличения точности аппроксимации можно ввести в модель сглаживания ряда по базам, либо с начала, либо с середины ряда.

Census I. Прогнозирование по модели Census I представляет из себя сезонную декомпозицию. Методом спектрального анализа[3][4] получено значения Лага для декомпозиции (это значение также будет использовано и в других моделях), $L = 11$. Ряд имеет четко выраженную сезонную составляющую, она прослеживается на графике спектрального анализа.

Ряд был сглажен по центрированной скользящей средней в середине ряда[6]. Были получены значения тренд цикла, который позже был дифференцирован на трендовые и циклические составляющие). Они представлены на рисунке 5.

Уравнение тренда при автоматическом расчете в Statistica приняло вид:

$$y_i = 30,54 + 0,309 * x$$

При этом, параметры уравнения почти не отличаются от таковых, полученных по МНК, что говорит о высокой достоверности модели.

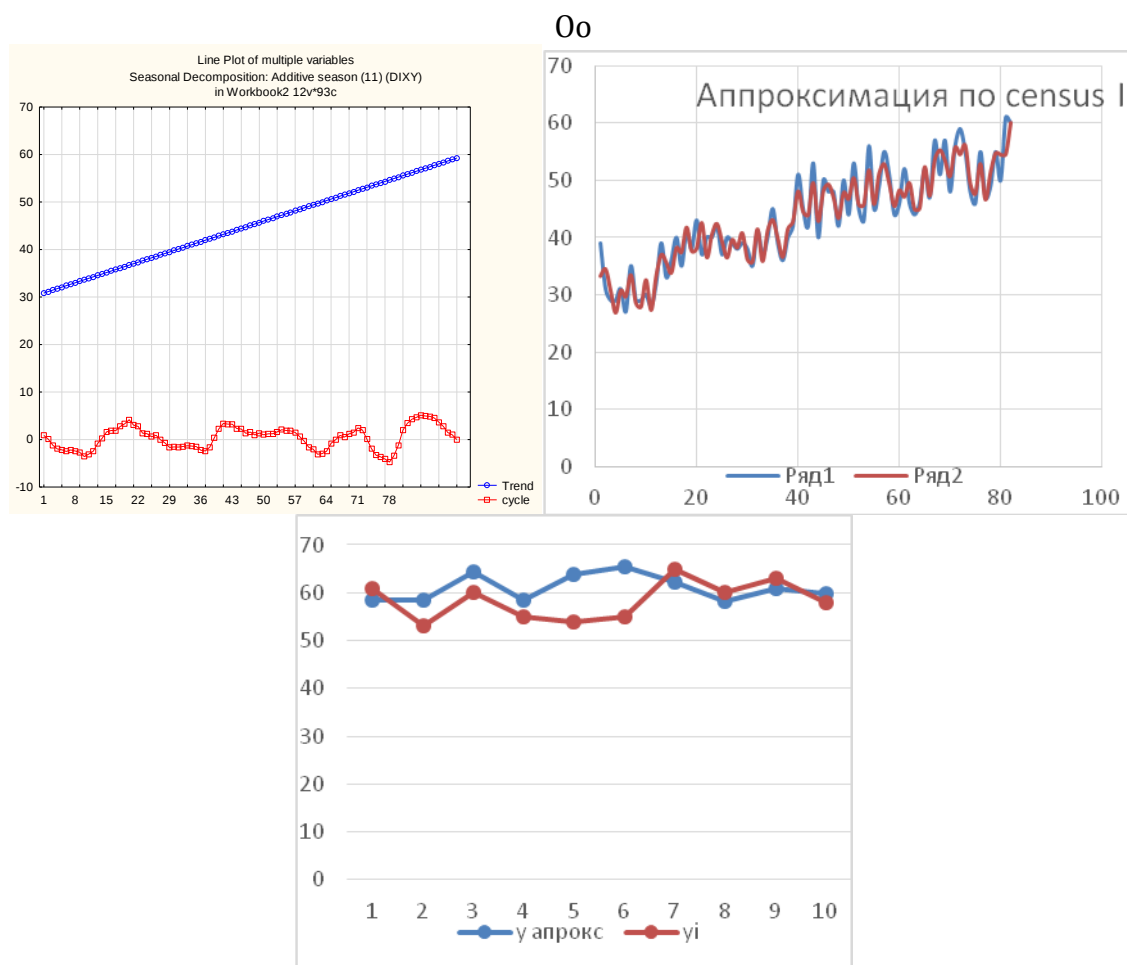


Рис.5. а) Тренд и циклическая составляющая. б) Аппроксимация по Census I. в) Прогноз на 10 значений вперед.

Из таблицы три видно, что средняя ошибка прогноза на 10 значений вперед составляет 3,872754 пункта при СКО равным 2,44963, доверительные интервалы также существенно уменьшились.

По факту, CENSUS I. является лишь усовершенствованием простых трендовых моделей, однако на основе данного исследования видно, что при включении модель сезонной составляющей аппроксимация и качество прогноза существенно возрастают.

Таблица 3. Статистические показатели CENSUS I.

St	2,44963
m_a	0,2705
m_b	0,0041192
m_{yk}	3,872754
t	7,2630307
D – доверительный интервал	$\pm 3,583309$
mSt	0,1912



Экспоненциально сглаживание. Как уже писалось выше, в ряду присутствует восходящий тренд и наличествует сезонность, однако, не лишним будет тестирование модели простого экспоненциального сглаживания (далее ПЭС) для сравнения с похожими моделями.

При поиске на сетке (функция анализа ПО Statistica), было получено значение коэффициента α в модели. На рисунке 6.а представлен результат поиска.

Parameter grid search (Smallest abs. errors are highlighted) (DIXY) Model: No trend, no season ; S0=43,41 QUANTITY Include cases: 1:82							
Model Number	Alpha	Mean Error	Mean Abs Error	Sums of Squares	Mean Squares	Mean % Error	Mean Abs % Error
7	0,400000	0,414661	3,876328	1867,744	22,77736	-0,141529	8,956864
6	0,350000	0,454001	3,883441	1873,559	22,84828	-0,104832	9,011886
8	0,450000	0,382813	3,905426	1878,831	22,91258	-0,173813	8,994952
5	0,300000	0,504836	3,926219	1900,957	23,18240	-0,059977	9,150161
9	0,500000	0,356105	3,962435	1903,951	23,21892	-0,203532	9,105874
10	0,550000	0,333095	4,033862	1941,299	23,67437	-0,231605	9,258626
4	0,250000	0,574297	3,996451	1958,050	23,87866	0,000677	9,364481
11	0,600000	0,312859	4,108424	1989,750	24,26524	-0,258496	9,419623
12	0,650000	0,294778	4,187907	2048,659	24,98365	-0,284448	9,592199
3	0,200000	0,675850	4,085788	2060,454	25,12748	0,093017	9,633225

Parameter grid search (Smallest abs. errors are highlighted) (DIXY) Model: Linear trend, mult. season(11); S0=28,86 T0=.3223 QUANTITY Include cases: 1:72									
Model Number	Alpha	Delta	Gamma	Mean Error	Mean Abs Error	Sums of Squares	Mean Squares	Mean % Error	Mean Abs % Error
1157	0,300000	0,100000	0,100000	0,119409	2,967716	1024,500	14,22917	-0,286145	6,926578
1446	0,350000	0,100000	0,100000	0,117551	2,990133	1028,488	14,28456	-0,277744	6,975311
868	0,250000	0,100000	0,100000	0,115718	2,986432	1030,683	14,31504	-0,310769	6,985931
1735	0,400000	0,100000	0,100000	0,113259	3,019134	1042,290	14,47625	-0,278586	7,043659
1174	0,300000	0,150000	0,100000	0,116671	3,009597	1043,969	14,49957	-0,299942	7,029490
579	0,200000	0,100000	0,100000	0,101154	3,033440	1044,827	14,51148	-0,361728	7,120457
1463	0,350000	0,150000	0,100000	0,114718	3,031798	1046,829	14,53929	-0,291536	7,077018
1	0,100000	0,100000	0,100000	0,015303	3,095592	1047,742	14,55198	-0,559336	7,303988
1447	0,350000	0,100000	0,150000	0,130763	3,035506	1049,385	14,57480	-0,238947	7,092497
1158	0,300000	0,100000	0,150000	0,138061	3,016906	1049,693	14,57907	-0,237381	7,046912

Parameter grid search (Smallest abs. errors are highlighted) (DIXY) Model: Linear trend, no season ; S0=38,87 T0=.2593 QUANTITY Include cases: 1:82								
Model Number	Alpha	Gamma	Mean Error	Mean Abs Error	Sums of Squares	Mean Squares	Mean % Error	Mean Abs % Error
86	0,350000	0,100000	0,093111	3,808886	1826,065	22,26908	-0,654664	8,776892
69	0,300000	0,100000	0,083790	3,829597	1828,326	22,29665	-0,704013	8,878409
103	0,400000	0,100000	0,099363	3,825379	1840,655	22,44701	-0,622268	8,780604
52	0,250000	0,100000	0,071322	3,886338	1849,739	22,55780	-0,775252	9,075525
120	0,450000	0,100000	0,102855	3,882638	1870,085	22,80591	-0,602779	8,898999
87	0,350000	0,150000	0,103833	3,836279	1873,371	22,84598	-0,582053	8,814013
70	0,300000	0,150000	0,093784	3,868781	1882,284	22,95469	-0,627029	8,942698
104	0,400000	0,150000	0,110284	3,859265	1885,065	22,98859	-0,555289	8,841495
35	0,200000	0,100000	0,055009	3,986136	1891,696	23,06947	-0,875264	9,388310
88	0,350000	0,200000	0,114559	3,851927	1911,610	23,31232	-0,521093	8,837664

Рис.6. Поиск на сетке. а) Простое Экспоненциально сглаживание. б) Модель Хольта-Винтерса. в) Модель Хольта.

Данные об аппроксимации и о прогнозе на 10 шагов вперед представлены в таблице 4, 5 и рисунке 7.а и 7.б соответственно. В Таблице 6 показаны аналитические статистики для данного метода.

Таблица 4. Исходные и сглаженные значения.

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y _i	39	31	29	29	31	27	35	29	29	30
Y _j	43	42	38	34	32	32	30	39	37	30

Таблица 5. Исходные и предсказанные значения.

X	Real	Forecast
1	62	57
2	55	57
3	54	57
4	62	57
5	55	57
6	63	57
7	66	57
8	61	57
9	58	57
10	64	57

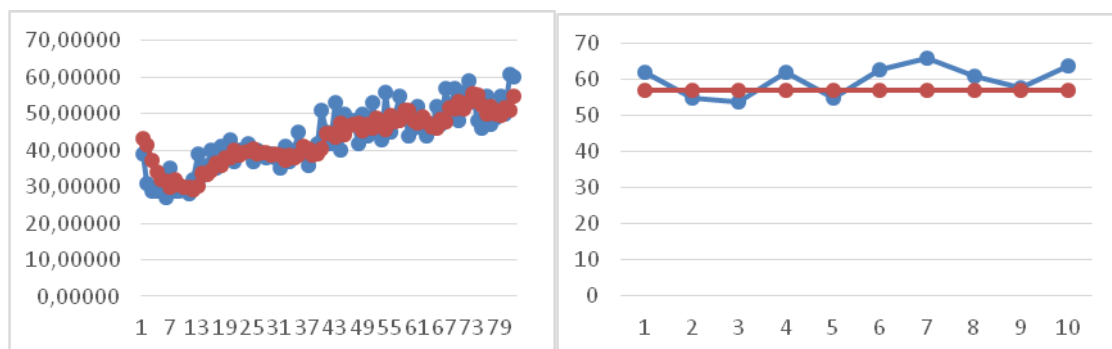


Рис.7. Простое экспоненциально сглаживание. а) Аппроксимация. б) Прогноз.

Таблица 6. Статистические показатели Простого Экспоненциального сглаживания.

St	4,89898
m_a	1,54919
m_b	0,66058
m_{yk}	6,78501
t	3,72
D – доверительный интервал	$\pm 6,16$
mSt	1,09545

Как видно из таблицы: для ПЭС существенно выше ошибка прогноза, относительно двух других моделей, также больше и доверительные интервалы для обеих границ, t-статистика больше табличного для данных степеней свободы, что говорит о статистической значимости зависимостей между исходным и аппроксимированным рядлм. Из прогнозных значений видно, что при простом ЭС предсказанные значения упираются в одну точку из-за отсутствия динамического поступления данных в систему. Введя тренд и сезонность в модели удастся добиться значительного улучшения результатов.

Таблица 7. Исходные и сглаженные значения. Модель Хольта.

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	39	31	29	29	31	27	35	29	29	30
y_j	39	39	35	32	30	30	28	31	30	29

Таблица 8. Исходные и сглаженные значения. Модель Хольта-Винтерса

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	39	31	29	29	31	27	35	29	29	30
y_j	30	35	32	29	32	31	33	30	29	33

Таблица 9. Прогноз. Модель Хольта.

y	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
y_i	61	53	60	55	54	55	65	60	63	58
y_j	59	60	60	61	62	62	63	63	64	65



Таблица 10. Прогноз. Модель Хольта-Винтерса.

y	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
y _i	61	53	60	55	54	55	65	60	63	58
y _j	56	62	55	54	62	54	62	65	61	58

Таблица 11. Статистические показатели. Модель Хольта.

St	4.821302
m_a	0.532424
m_b	0,082642
m_{Yk}	7.622251
$t =$	3.69039
D – доверительный интервал	± 6.210657
mSt	0.376848

Таблица 12. Статистические показатели. Модель Хольта-Винтерса.

St	4.00357
m_a	0.442121
m_b	0.068631
m_{Yk}	6.329467
t	4.444135
D – доверительный интервал	± 5.392932
mSt	0,312627

По данным статистическим характеристикам можно сделать вывод о том, что при внесении параметров тренда в модель увеличивается степень аппроксимации модели, однако, при прогнозе присутствие сильной волатильности ставит под сомнение адекватность модели. Напротив, при использовании модели Хольта-Винтерса значение среднеквадратичного отклонения падает на 10%, доверительные интервалы в данной модели также падают, относительно модели Хольта, на 12%, также заметно снижается и средняя ошибка прогноза на 10 значений вперед. На рисунке 8 находится визуальное представление моделей Хольта и Хольта-Винтерса.

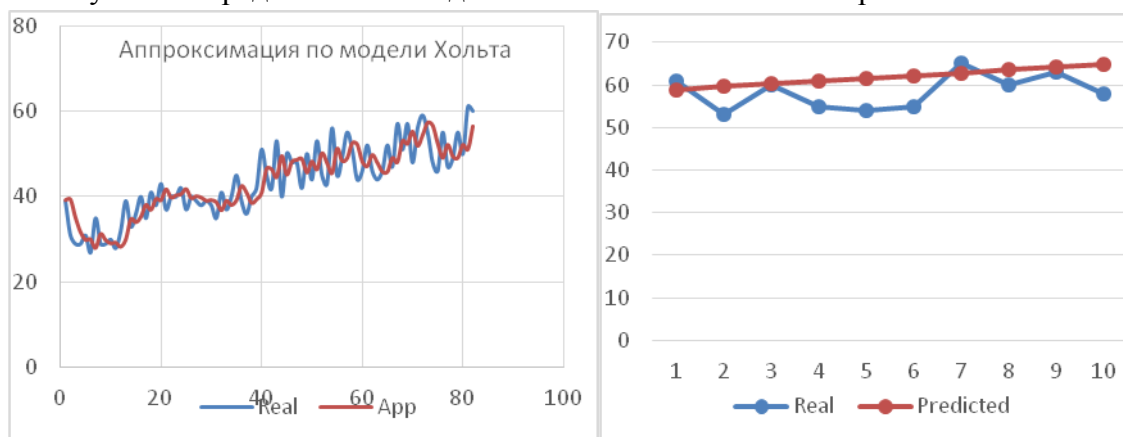


Рис.8а. Модели Хольта и Хольта-Винтерса. а) Аппроксимация по модели Хольта. б) Прогноз по модели Хольта.

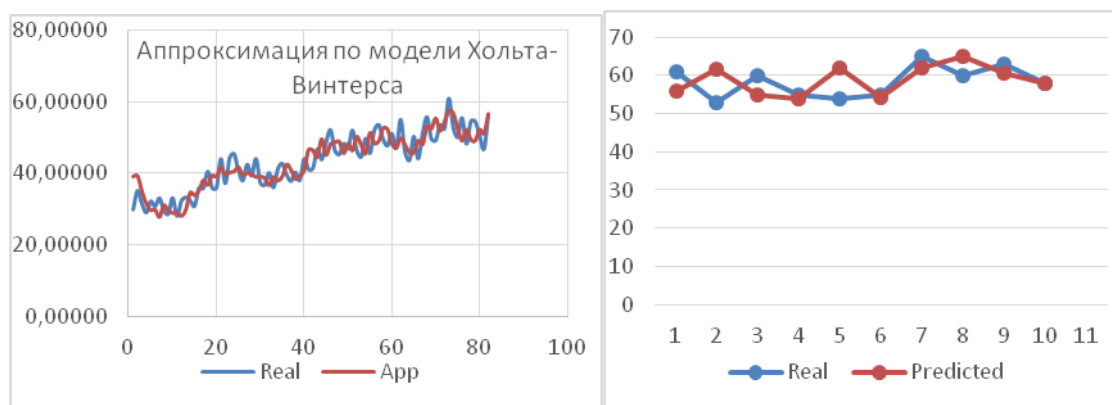


Рис.86. Модели Хольта и Хольта-Винтерса в) Аппроксимация по модели Хольта-Винтерса. г) Прогноз по модели Хольта-Винтерса.

Об AR, ARIMA и ARIMASC просессах было подробно рассказано в предыдущем материале[7]. В связи с этим, будет целесообразно привести в данной статье лишь статистические характеристики данных процессов для сравнения их с остальными моделями.

При анализе AR моделей было установлено, что одним из удовлетворительных вариантов моделей является модель AR (2;0). Надженость р-параметров при этом составила 0,57 и 0,42 соответственно. Однако в коррелограмме для остатков были обнаружены автокорреляции, что говорит о:

- а) Не стационарности ряда
- б) Наличии тренда и волатильности.

В связи с коррелированностью остатков, получение статистики данных через МНК и его производные не представляется возможным. Исходя из полученных данных модель отвергается, как неадекватная. К примеру: в таблице 13 приведены значения исходного ряда и прогноза. Как видно – прогнозные значения плохо отражают динамику ряда

Таблица 13. AR-модель

x	Forecast	Real
83	60,42223	61
84	60,23357	53
85	60,30730	60
86	60,26833	55
87	60,27777	54

При использовании ARIMASC (1,1,2)(0,0,1) не наблюдается автокорреляции в остатках, их распределение является нормальным, что говорит об адекватности модели.

На рисунке 9 представлена визуализация модели ARIMASC

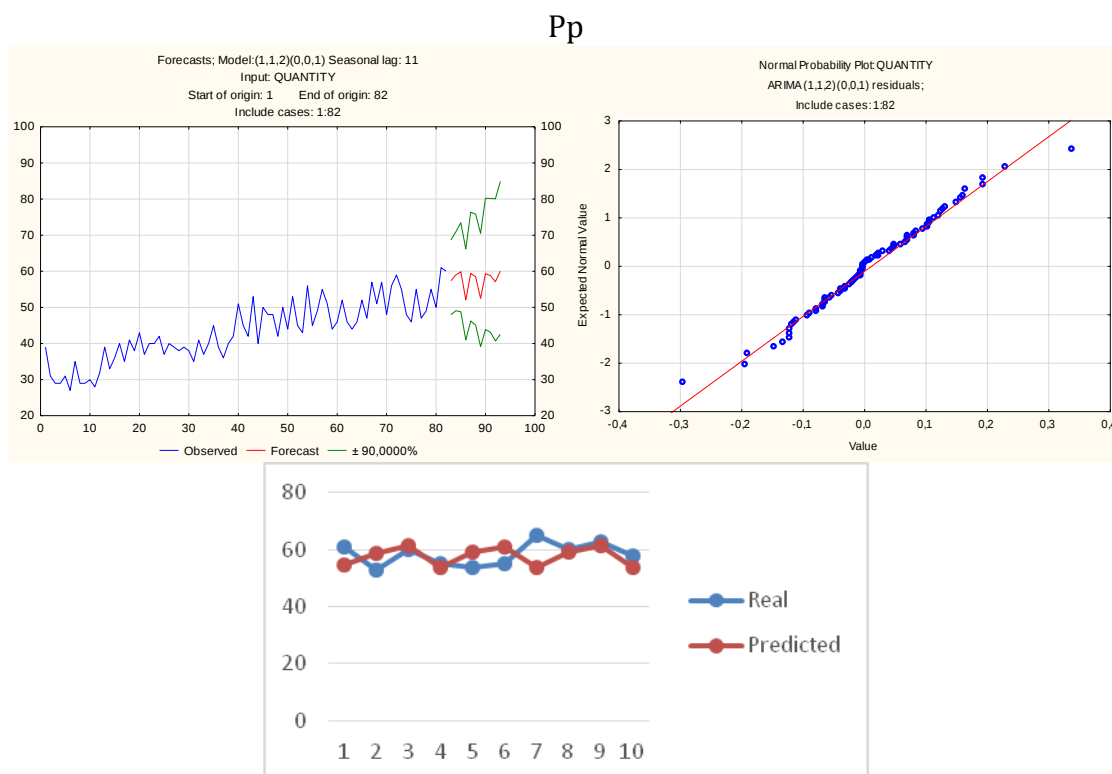


Рис.9. Модель ARIMASC. а) Прогноз по модели. б) Распределение остатков. в) Приближение прогноза.

В связи с тем, что оценивание параметров ARIMA через классический МНК затруднено [1], то в данном случае удобнее будет воспользоваться критериями Шварца и Айкаике [6], также, еще одной метрикой будет служить средняя ошибка прогноза модели на 10 дней вперед.

$$AIC = \frac{p+q}{n} + \ln\left(\frac{\sum \varepsilon^2}{n}\right), \quad (10).$$

$$SIC = \frac{(p+q) \ln n}{n} + \ln\left(\frac{\sum \varepsilon^2}{n}\right), \quad (11).$$

Оценка критериев находится в таблице 14.

AIC	
ARIMASC	-5,24316
AIC ARIMA	-5,25535
SIK	
ARIMASC	-5,20161
SIK ARIMA	-5,17226

Модели почти одинаково равнозначны, что говорит об адекватности каждой из них. Проведем оценку средней ошибки прогноза на 10 значений вперед по формуле:

$$M_{er} = \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i}, \quad (12)$$

Параметр/Модель	ARIMASC (1;1;2)(0;0;1)	ARIMA (1;1;2)
$\bar{M}_{er}$	0.066 или 6,6%	0,091 или 9,1%

Модель ARIMASC (1;1;2)(0;0;1) предпочтительнее для выбора из за существенно более низкой средней ошибки прогноза.

Для простой ARIMA данные выглядят следующим образом.

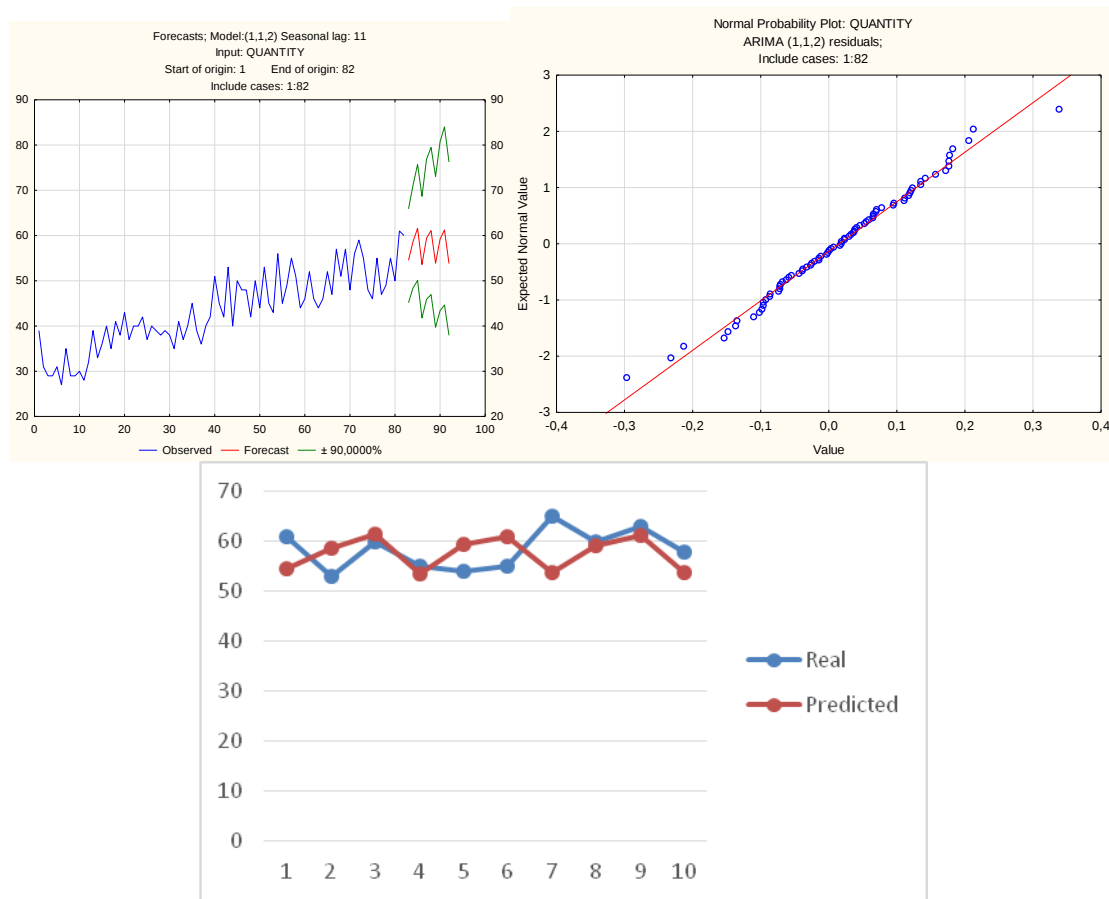


Рис.10. Модель ARIMA. а) Прогноз по модели. б) Распределение остатков. в) Приближение прогноза.

Модели ARIMA очень чувствительны к взаимосвязанным признакам внутри ряда. Для наилучшей аппроксимации необходимо выполнить аналитическую подготовку ряда, найти лаги, сезонность и провести анализ коррелограмм на входе, и анализ остатков на выходе.

Нейросетевые модели. В данной работе рассматривалось два метода использования нейросетевых моделей. Радиально-Базисные функции и сети многослойных персептронов. Однако, во время анализа и моделирования ряда РБФ давали заметно худшее качество прогноза и аппроксимации, поэтому от их анализа было решено отказаться в пользу более успешных МП моделей.

Всего было построено и проанализировано около 100 различных моделей. Самые успешные из них имеют следующие параметры:

Таблица 16. Параметры нейросетей.

Количество нейронов	входных	Количество нейронов	скрытых	Количество выходных нейронов
12		8		1
		4		

График прогноза на 10 значений вперед представлен на рисунке 11.

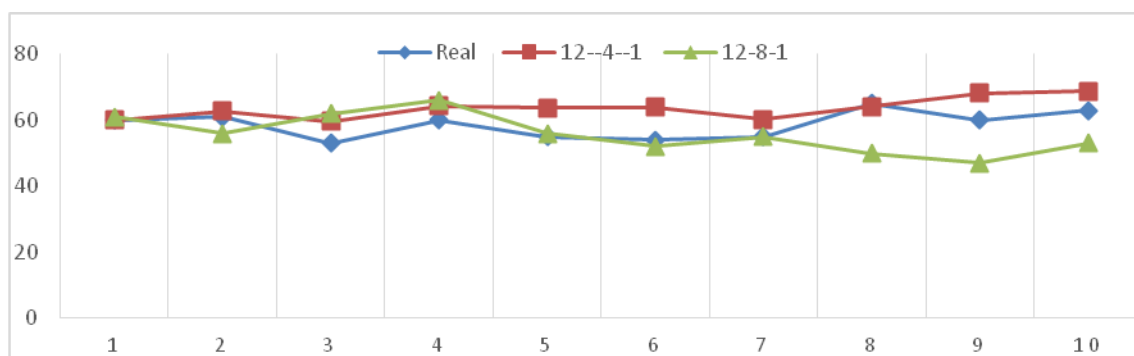


Рис.11. Нейросетевые модели.

Для анализа из ряда был убран ряд значений, а именно: 1-34 для модели 12-8-1 и 1-55 для модели 12-4-1. Ведение периодизации динамики ряда и отказ от ряда периодов позволили существенно повысить качество выходной модели. Остатки в обеих моделях не имеют автокорреляций, что позволило проверить данные модели по МНК. В таблице 17 показаны статистики данных моделей.

Таблица 17. Статистика нейросетей.

Модель/Параметр	St	m_a	m_b	m_{yk}	t	D	mSt
12-8-1	7,06	1,17	0,27	12,64	2,92	9,11	0,83
12-4-1	5,71	1,13	0,3	11,47	1,46	5,67	0,79

При модели 12-8-1 критерий Стьюдента больше табличного при вероятности 95%, при 12-4-1 критерий больше табличного при вероятности в 90%. Однако из двух данных моделей при прогнозе можно рассматривать лишь модель 12-4-1 из-за более низкого значения доверительных интервалов и СКО.

Консенсус-прогноз. Для консенсус-прогноза необходимо сравнить все приведенные модели по параметру СКО, доверительных интервалов, а также по ошибке прогноза период. Эти данные содержатся в итоговой таблице моделей.

Таблица . Итоговые параметры моделей.

Модель/Параметр	СКО	Myk	D
Трендовые модели	4,15	6,57	5,54
Census I	2,44	3,82	3,5
ПЭС	4,89	6,78	6,16
Модель Хольта	4,82	7,62	6,21
Модель Хольта-Винтерса	4	6,32	5,39
ANN	5,71	11,47	5,67

В консенсус прогнозе будут использованы три модели, а имен: ARIMASC, модель Хольта-Винтерса и Census I. Прогноз будет строиться на одну неделю вперед.

Таблица . Консенсус Прогноз.

Прогноз/день	1	2	3	4	5	6	7
Min	58	55	61	57	53	51	53
Max	58	63	62	64	61	65	65
Avg	58	59	61	60	58	59	59
Участники	-	3	3	3	3	3	3



На рисунке 12 представлен консенсус-прогноз по позиции «Фарш Охлажденный»

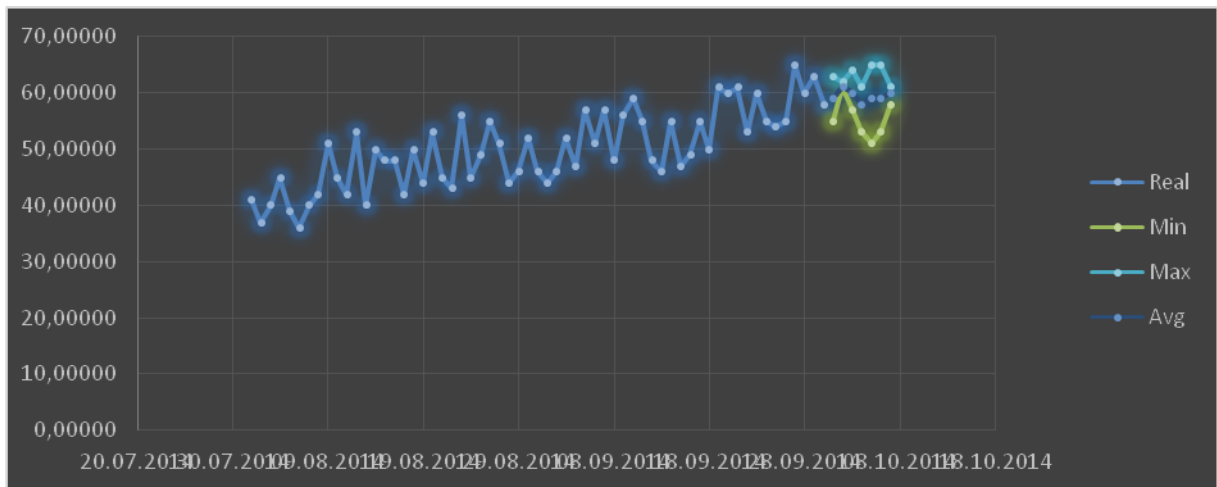


Рис.12. Консенсус Прогноз.

Таким образом были получены значения консенсус прогноза на 7 дней вперед по трем моделям. Динамика ряда при этом сохраняется, по-прежнему в нем наличествует сезонность и возрастающий тренд.

Так-как данный ряд можно отнести к рядам со случайной, нормально распределенной колеблемостью, то для решения задач, похожих на данную, лучше всего применять модели, отражающие тренд и сезонность.

Качество прогноза позволяет решить сразу несколько практических задач в данной области:

- 1) Расчет объемов партии поставщику.
- 2) Снижение потерь.
- 3) Решение задачи о товарном запасе.

Решение задачи о размещении ТМЦ.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бокс Дж., Дженкинс Т. «Анализ временных рядов. Прогноз и управление», М.: Мир, 1974, 242 с.
2. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. — М.: Дело, 2007. — 504 с.
3. Щипачев В.С. «Высшая математика». Учеб. для вузов. — 4-е изд., стер. — М.: Высшая школа, 1998. — 479 с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. М., 1969 — 480 с.
5. Jackie M., Ph.D., Walden University, L. Abrams, Ph.D., Capella University. «Paired Samples-t-Test». Statistic solutions. URL: <https://www.statisticssolutions.com/manova-analysis-paired-sample-t-test/>.
6. В.Н. Афанасьев, М.М. Юзбашев. «Анализ временных рядов и прогнозирование» Учебник. — 2-е изд., перераб. и доп. «Инфа-М» 2012. — 320 с.